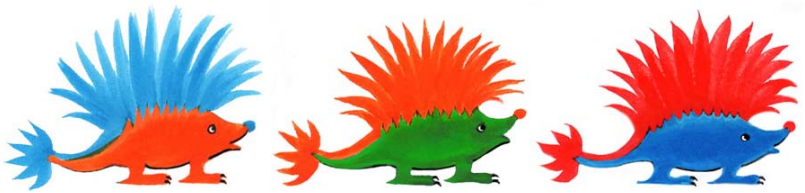
Теория множеств



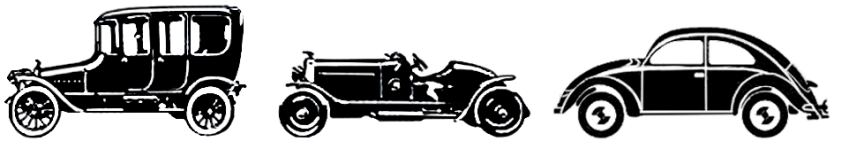
© Карина Кудинова, 2013

В математике понятие *множества* очень важно.
Множество - это набор каких-нибудь элементов.

Множество может быть таким

$\{3, 6, 9, 12, 15\}$

Или таким



Или даже таким

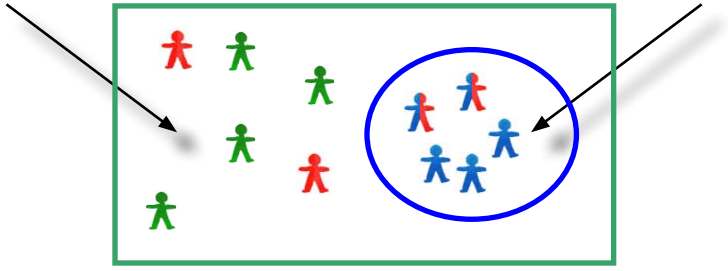
При этом элементы могут располагаться как угодно. Имеет значение только *какие* именно элементы составляют множество.

Это, например, одно множество, просто описанное по-разному.

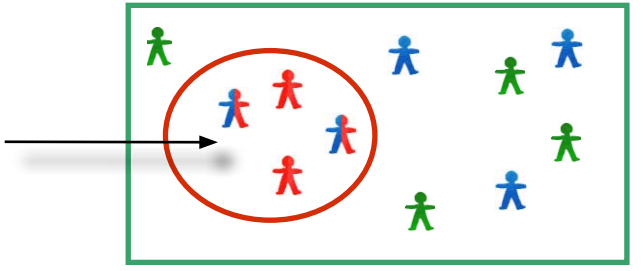
Множества удобно анализировать с помощью *диаграмм Венна*.

Этот прямоугольник показывает всех учеников в классе

Этот круг показывает учеников, которые занимаются плаванием



А этот, тех, кто занимается пением



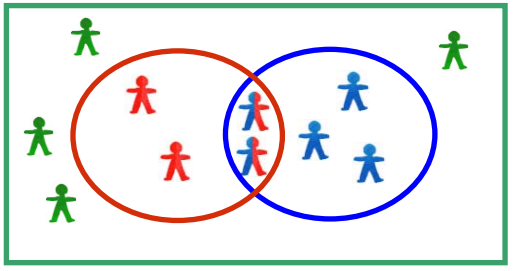


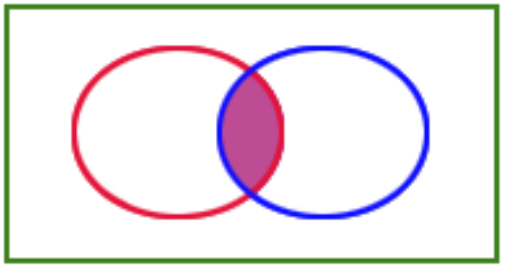
Диаграмма Венна

Диаграмма Венна показывает всё про это множество учеников: и тех, кто поёт, и тех, кто не поёт и не плавает, и тех, кто и поёт, и плавает, и тех, кто только плавает.

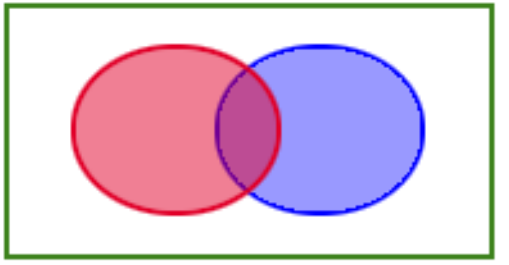
С помощью Диаграмм Венна можно иллюстрировать определения Теории Множеств.

Обозначим множества поющих и плавающих учеников буквами A и B

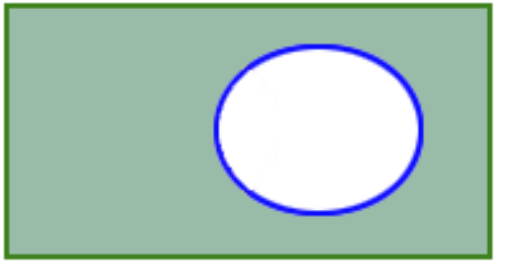
Пересечение двух множеств состоит из элементов, находящихся в каждом из множеств $A \cap B$



Объединение множеств — это множество, состоящее из элементов, которые находятся хотя бы в одном из исходных множеств. $A \cup B$



Дополнение — это семейство элементов, не принадлежащих данному множеству. $\overline{A}$

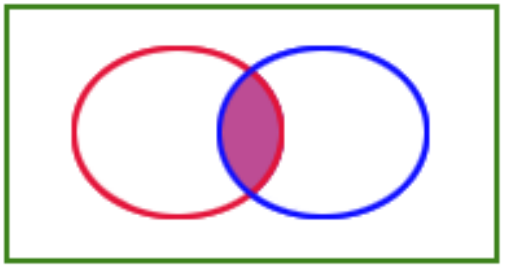


Эти определения помогут доказать нам *законы Де Моргана*.

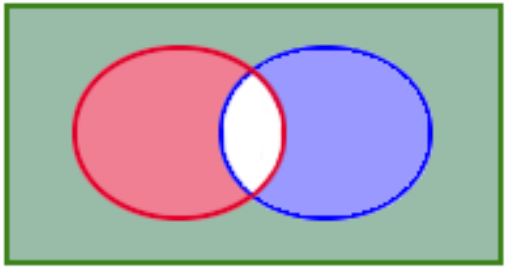
Первый закон говорит нам,

что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Чтобы доказать это, достаточно нарисовать , как выглядят эти множества и сравнить их.

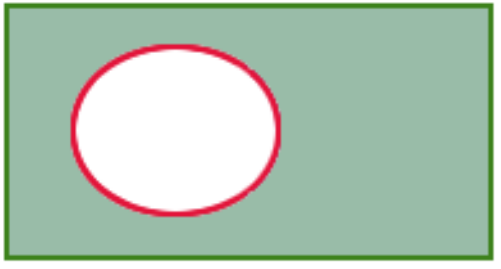


$A \cap B$

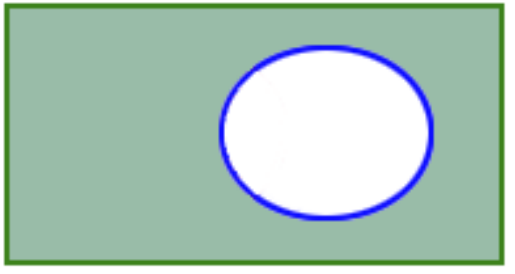


$\overline{A \cap B}$

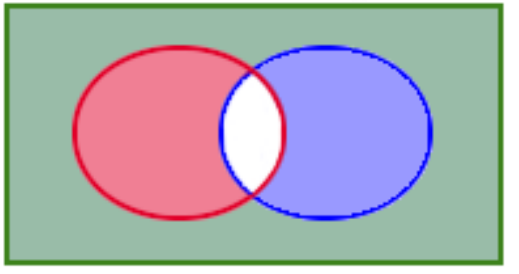
← Одно и то же



$\overline{A}$



$\overline{B}$



$\overline{A} \cup \overline{B}$

Второй закон утверждает, что

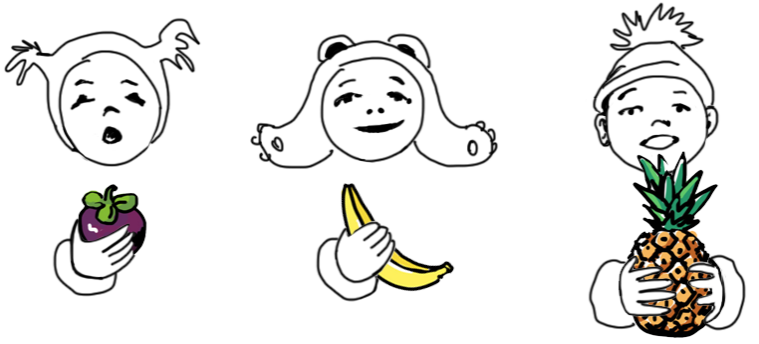
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Попробуете это сами доказать?

Что общего у этих двух множеств?

Они содержат по три элемента. В математике количество элементов множества называется его *мощностью*.

Два множества обладают одной и той же мощностью, если мы можем каждому элементу одного множества поставить в соответствие элемент другого множества так, чтобы каждому хватило соответствующего элемента. Это называется *взаимно-однозначное соответствие*.



У этих множеств одинаковая мощность (3)

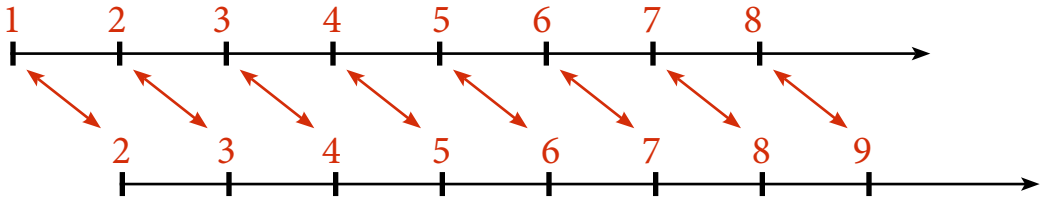
А у этих множеств мощность разная. Почему?

Всё это понятно и легко для конечных множеств, а как же быть с бесконечными? Все сразу оказывается не так просто

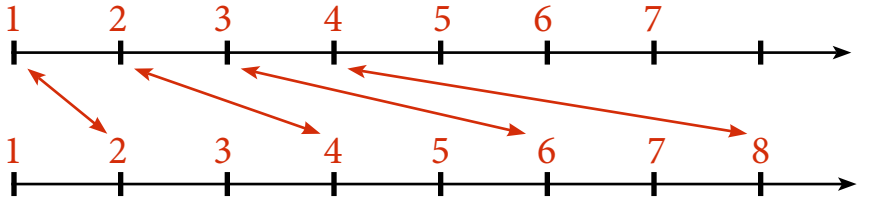
Какое из этих множеств “больше” 1,2,3,4... или 2,3,4... ?

Во втором множестве отсутствует элемент 1, так что оно должно было бы быть “меньше”, но оказывается, что у этих множеств одинаковая мощность. Ключ к разгадке в построении правильного взаимно-однозначного соответствия.

Соединим 1 из первого множества с 2 из второго. Теперь 2 из первого с 3 из второго, и так далее. Каждый элемент n из первого множества всегда найдёт свою пару n+1 во втором — ведь множества бесконечны. Поэтому эти множества *равномощны* (одинакового размера).



А что насчёт множества натуральных чисел 1,2,3,4... и множества чётных чисел 2,4,6,8... ? Выходит, что они тоже одинаковы по размеру и мощности. Просто теперь каждому элементу n одного множества соответствует 2*n другого:



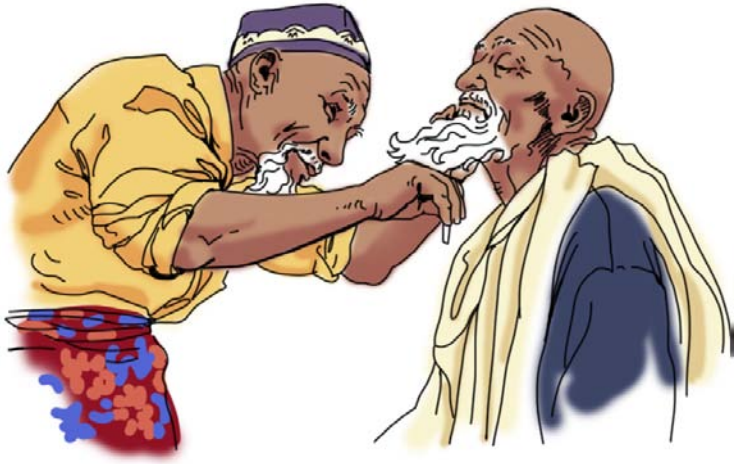
Если вам это не кажется уже достаточно странным, поговорим о парадоксе, ставшем знаменитым благодаря Бертрану Расселу.

У этого парадокса много вариантов и все они имеют отношение к *множествам, содержащим себя в качестве элемента*. Это понятие в своей простой форме описано в Парадоксе Брадобрея (парикмахера).

Сельский Брадобрей бреет всякого, кто не бреется сам и не бреет тех, кто сам бреется. Как же он должен поступить с самим собой?

Если он побреет сам себя, то станет тем человеком, который бреется сам, а он таких не бреет.

Если же брадобрей не станет себя брить, то выходит — он просто обязан это сделать, поскольку он бреет каждого, кто сам не бреется.



От таких размышлений у всякого может закружиться голова. Поэтому, чтобы такого не происходило, математики решили избегать множеств, которые содержат себя в качестве элемента.