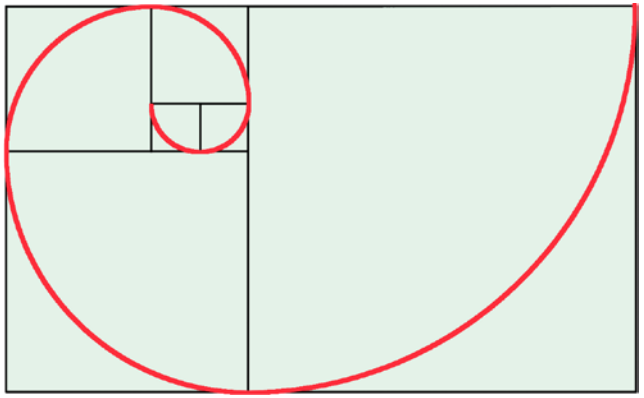
Последовательности

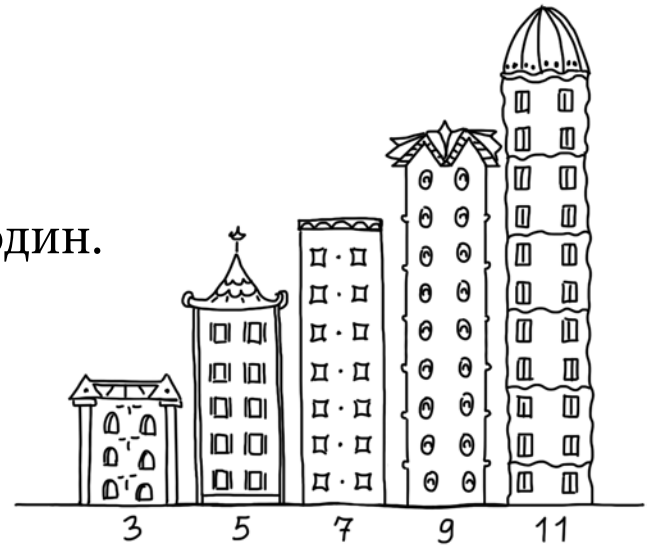


Карина Кудинова, 2013

Давайте посмотрим на последовательность натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Как строится эта последовательность?
Каждое число равно предыдущему, плюс один.
Это пример *арифметической прогрессии.*



В арифметической прогрессии каждое число отличается от предыдущего на одинаковую величину.

Это пример арифметической прогрессии:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19$$
$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4$$

А это — нет:

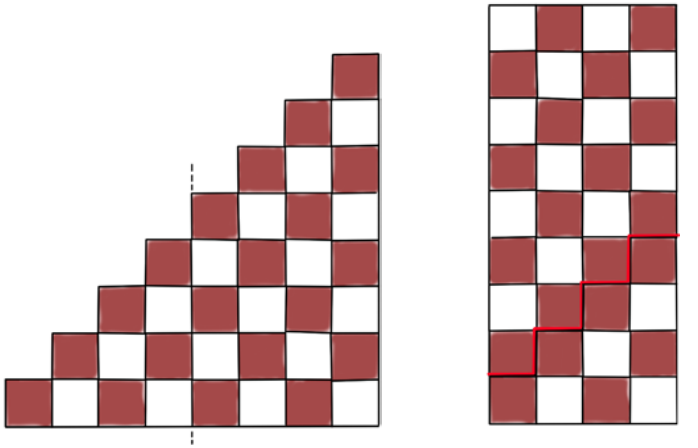
$$5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12$$
$$2 \quad 2 \quad 1 \quad 2$$

Арифметическая прогрессия никогда не кончается, но давайте возьмём несколько элементов прогрессии и попробуем их сложить.

Начнём с 1+2+3+4+5+6+7+8

$$1+2+3+4+5+6+7+8=9\times4=36$$

Мы можем связать все элементы попарно: первый с последним, второй с предпоследним и так далее. В этом случае у нас получились четыре пары, каждая в сумме составляет 9, так что общий результат равен 36.



Такой же прием мы можем проделывать и с большими числами:

$$1+2+3+\ldots+998+999+1000=1001\times500=500500$$

Чтобы найти сумму элементов арифметической прогрессии, сложите первое число с последним, умножьте на количество элементов, которые вы складываете и разделите на два.

Попробуйте найти сумму:

$$3+7+11+15+19$$

Если количество элементов нечётное, формула всё равно работает.

Арифметическая прогрессия образуется посредством добавления некоторого постоянного числа к предыдущему, а что будет, если мы будем не складывать, а умножать? Тогда у нас получится *геометрическая прогрессия.*

Геометрическая прогрессия — это такая последовательность чисел, в которой каждый следующий элемент образуется, если предыдущее число умножить на некоторую постоянную величину.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots$$

Давайте выведем формулу суммы первых n элементов этой последовательности:

$$1+2+2^2+ \ldots 2^{n-2}+2^{n-1} = x$$

Если мы умножим обе стороны этого равенства на 2, мы получим:

$$2+2^2+ \ldots 2^{n-1}+2^n = 2x$$

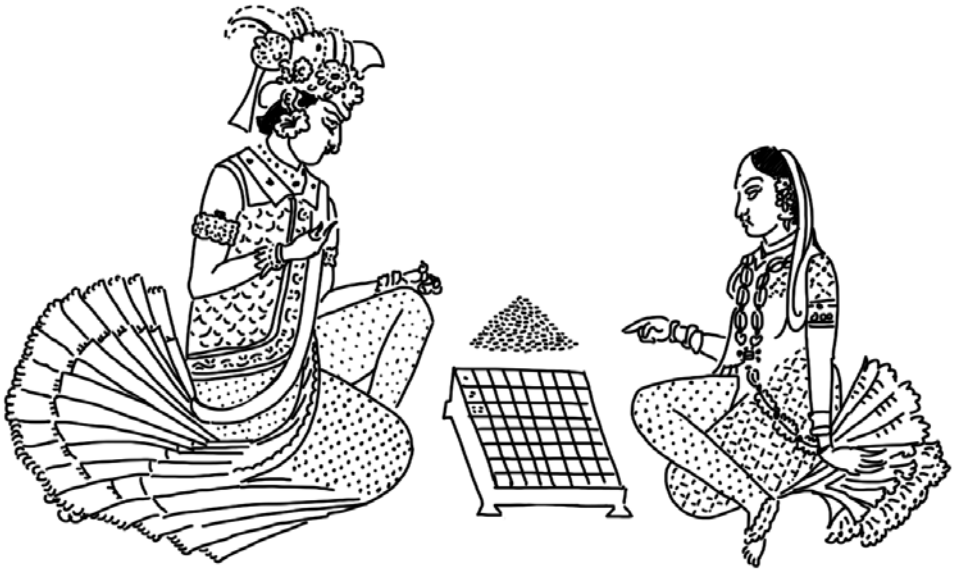
Да, но с левой стороны у нас та же последовательность, только без начальной единицы, и с добавлением 2^n:

$$x-1+2^n=2x$$

Тогда $x=2^n-1$ или $1+2+2^2+ \ldots+2^{n-1}=2^n-1$

Хотите проверить это при $n = 5$?

Существует легенда, что изобретатель игры в шахматы показал эту игру правителю своей страны. И тот был в таком восторге, что захотел вознаградить изобретателя, дав ему, чего только тот не попросит. Хитрый изобретатель попросил положить одну рисинку на один квадратик шахматной доски, две рисинки на второй, четыре на третий и так далее, всякий раз удваивая количество зёрен, пока всё поле в 64 квадратика не будет заполнено. Не видя подвоха правитель согласился, не понимая ещё о какой огромной сумме идёт речь. Как вы думаете, сколько же риса ему придётся выплатить?



Мы знаем, что $1+2+4+8+\ldots\ 2^{63}=2^{64}-1$

и $2^{64}-1=18.446.744.073.709.551.615$

Это очень большое число! Гора риса, с таким количеством зёрен, будет выше самой высокой горы в мире.

В геометрической прогрессии числа не обязательно увеличиваются, они и уменьшаться тоже могут. Вот например, такая геометрическая прогрессия:

$$1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \ldots$$

Интересно, можем ли мы найти сумму элементов этой прогрессии таким же способом?

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = x$$

Заметьте, что мы не обрезаем прогрессию, и добавляем бесчисленное количество элементов. Не бойтесь, мы можем это сделать!

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = 2x$$

Давайте умножим обе стороны равенства на 2. Слева мы имеем исходную прогрессию, равную x, с добавленной 1, соответственно слева равенство превращается в x+1.

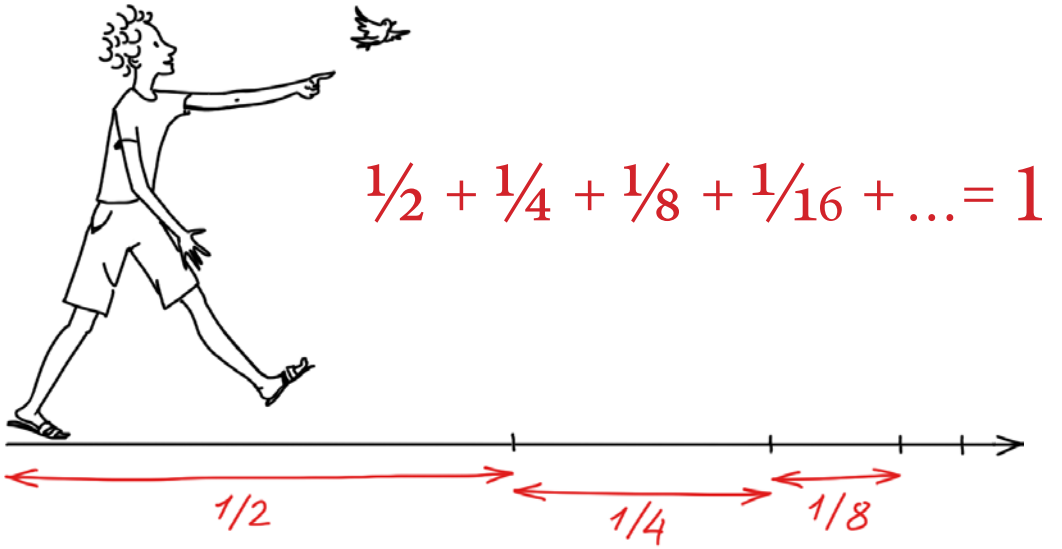
Тогда мы получим $x + 1 = 2x$ и $x = 1$

или $$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = 1$$

Этот результат связан с древним парадоксом, о котором мы знаем благодаря греческому философу Зенону Элейскому.

Если путешественник отправится из одного города в другой город, то, для начала, ему нужно будет пройти пол-пути, а затем половину оставшейся половины, то есть четверть всего расстояния; затем ему придётся пройти половину оставшейся четверти, и так далее, до бесконечности. Сможет ли он когда-нибудь дойти?

Но мы уже знаем, несмотря на то, что эта последовательность бесконечна



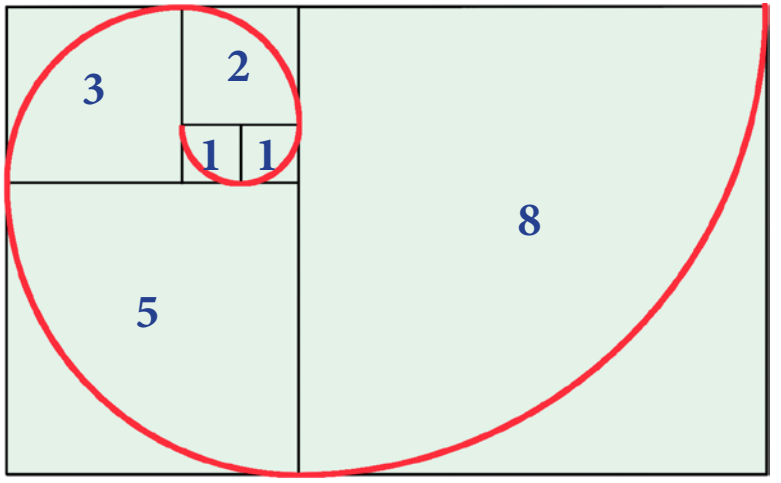
сумма ее элементов конечна и равна 1.

Помимо арифметических и геометрических прогрессий существуют и другие хорошо известные в математике последовательности. Например, "Числа Фибоначчи".

Эта последовательность начинается с двух единиц, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Последовательность Фибоначчи имеет много интересных свойств. Например из этих чисел можно построить *Спираль Фибоначчи*.



Вы видите, как по числам Фибоначчи выстраивается спираль?

А так же, когда числа увеличиваются, они всё более и более приближаются к золотому сечению, часто используемому в архитектуре и дизайне.