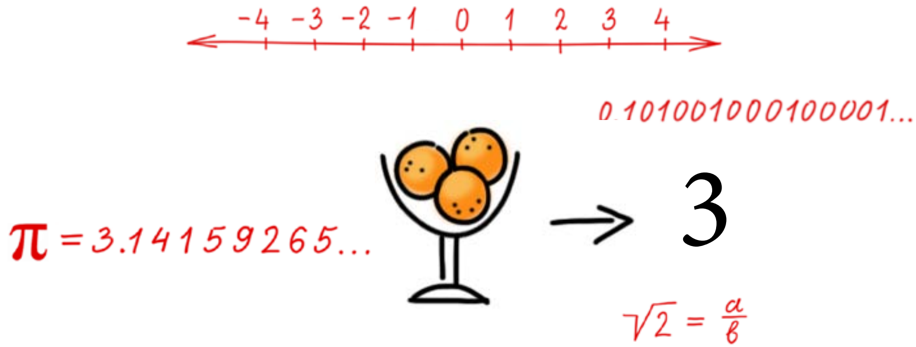
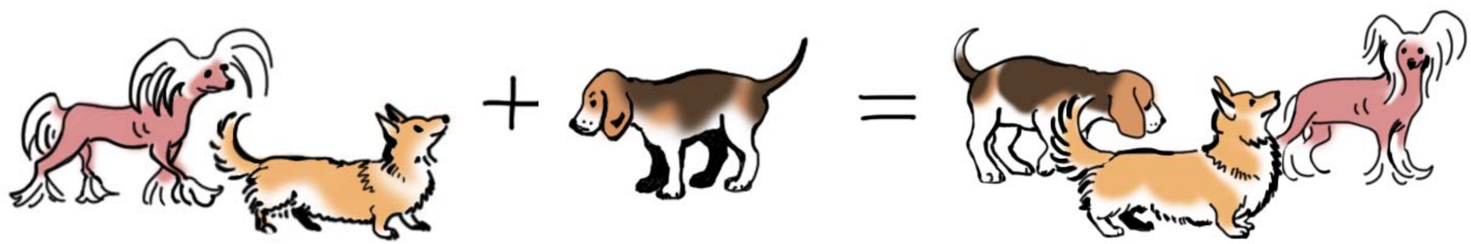
Какие Бывают Числа



Самые элементарные числа используются для подсчёта количества предметов: один, два, три ...

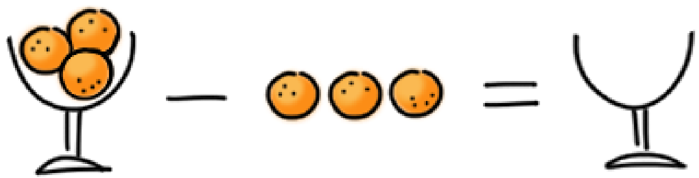
Эти числа настолько важны в математике, что они называются *натуральными* числами.

С помощью натуральных чисел мы можем складывать и вычитать.



Но одних натуральных чисел не хватает даже для простых вычислений.

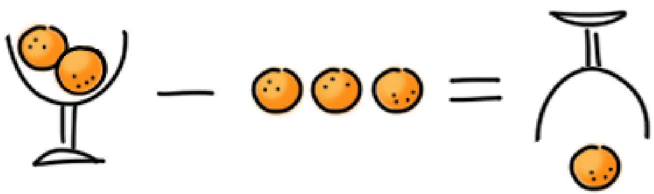
Если у нас есть три апельсина и мы съедим все три, сколько останется?



0

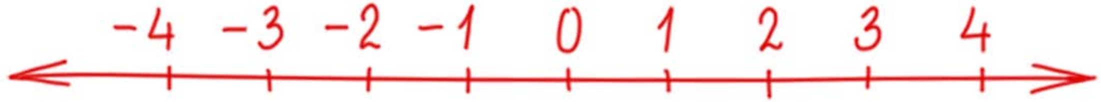
Открытие ноля было важным шагом в древние времена, но математики на этом не остановились.

Если у меня два апельсина и я должен отдать три, сколько у меня останется? Конечно, у меня не останется апельсинов, к тому же, мне придётся где-то раздобыть еще один апельсин. И здесь нам помогут *отрицательные* числа ...

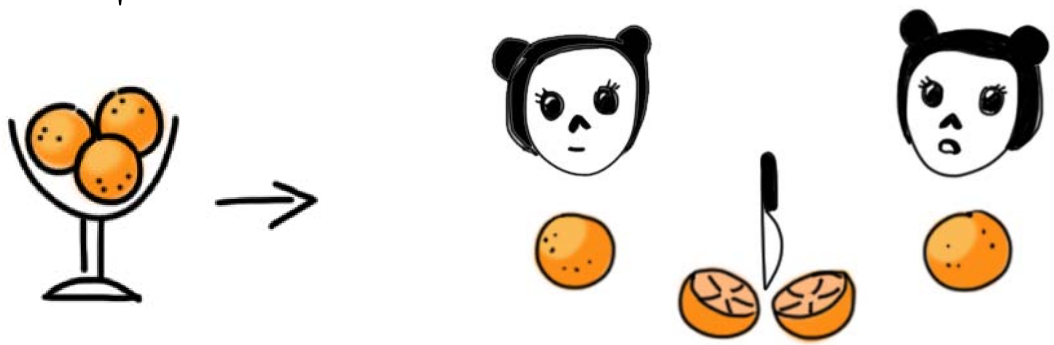


-1

Натуральные числа (1, 2, 3 ...), ноль и отрицательные числа (-1, -2, -3) вместе образуют *целые* числа.



Мы можем взять два целых числа и перемножить или сложить их, или вычесть одно из другого, результат всегда будет целым числом. Но не так всё просто с делением. Если разделить три апельсина на двоих, каждый получит по полтора апельсина. Но полтора — это не целое число.



Нас выручат *рациональные* числа. Их можно представить, как a/b, где и a и b целые.

$$\frac{3}{5} \quad \frac{27}{119} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{13597}{457129}$$

Рациональные числа можно складывать, умножать и делить. И в результате всегда получится рациональное число (если только мы не делим на ноль).

Целые числа тоже рациональные, потому что их можно написать как само число поделенное на единицу.

$5 = \frac{5}{1} \qquad 28 = \frac{28}{1}$

Рациональные числа можно представить как десятичные дроби. Есть теорема о том, что рациональные числа в десятичной форме либо конечны, либо имеют вид периодических дробей, в которых, начиная с некоторого места, стоит только периодически повторяющаяся определённая группа цифр.

$\frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{2}{3} = 0.666\ldots = 0.\overline{6} \qquad \frac{12}{7} = 1.\overline{714285}$

А можете придумать бесконечную дробь, которая не периодична? Как насчёт $0.101001000100001\ldots$

Здесь единицы перемежаются увеличивающимся количеством нулей. Почему эта дробь не периодическая, можете сказать?

И поскольку это не периодическая дробь, она — не рациональное число.

Числа, которые не являются рациональными, называются *иррациональными*. известное иррациональное число — это корень из двух. Это доказали ещё древние греки. Допустим число $\sqrt{2}$ рационально. Значит его можно представить как

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Есть теорема, что любую дробь можно привести к несократимому виду: числитель и знаменатель не имеют общих делителей. Так что будем считать, что дробь уже в таком виде.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Мы не будем здесь доказывать эту теорему, примите это пока на веру.

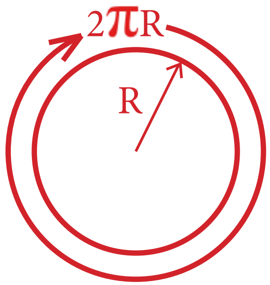
Значит a делится на 2 (можете сказать,почему?).

и мы можем написать $a = 2c$

$$(2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$$

Теперь b должно делиться на 2, и дробь сократима. Получается противоречие, которое доказывает, что наша гипотеза о том, что $\sqrt{2}$ рациональное число, не верна.

Ещё одно известное иррациональное число — π (Пи). Отношение длины окружности круга к его диаметру.



Оно иррационально, значит в нём бесконечно много цифр, которые нигде не начинают повторяться.

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233...

Сколько цифр в числе π ты сможешь запомнить? Можно использовать этот стишок, в котором количество букв в каждом слове соответствует цифрам в числе π.

Это я знаю и помню прекрасно: Пи многие знаки мне лишни, напрасны!

π = 3. 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 ...

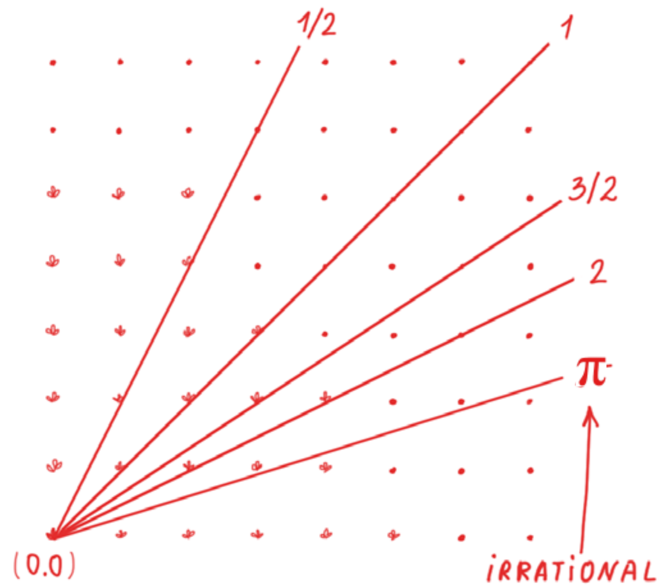
π не только иррационально — оно *трансцендентно*. В трансцендентном числе любая последовательность цифр встречается бесконечное количество раз.

Таким образом, бывают рациональные числа, которые можно представить как отношения целых чисел, а бывают числа иррациональные, которые таким образом представить нельзя. Вместе они образуют *действительные* числа.

Рациональных и иррациональных чисел бесконечно много, но, в некотором смысле, иррациональных чисел намного больше чем рациональных.

Представьте себе “решётку целых чисел”, где все точки имеют целые координаты (как деревья в лесопосадке). Для каждого рационального числа a/b существует луч с начальной точкой (0,0) и проходящий через точку (a,b).

Лучи ведущие через иррациональные числа промахнутся мимо *всех* точек (не заденут ни одно дерево). Существует теорема про то, что вероятность попадания является нулевой.



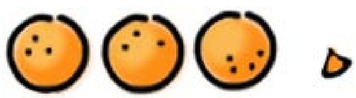
Другими словами, если, стоя в начальной точке отсчёта, мы посмотрим через узкий бинокль в любом произвольном направлении, скорее всего мы не увидим ни одной точки.

А действительные числа решают все задачи? Нет, действительные числа не содержат решения уравнения

$$x^2+1=0$$

Математики придумали еще один тип чисел: *комплексные* числа. Они используют действительные и мнимые числа, в частности число i, такое что $i^2=-1$

Мнимые числа не имеют прямого отношения к реальности. Можно говорить о π апельсинов...



но нельзя даже представить i апельсинов.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Математики очень изобретательны. Они придумали и дугие объекты, которые можно складывать и перемножать. Такие как векторы, матрицы и тензоры.