

# Комбинаторика



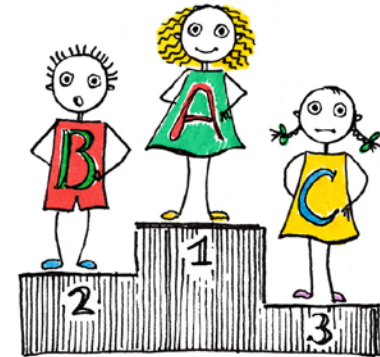
Три друга, Аня,  
Вася и Соня бегут  
100 метров.

Один из них выигрывает,  
другой прибегает вторым, а  
кто-то прибежал последним.



Давайте посмотрим, какие комбинации  
можно составить для этого случая.

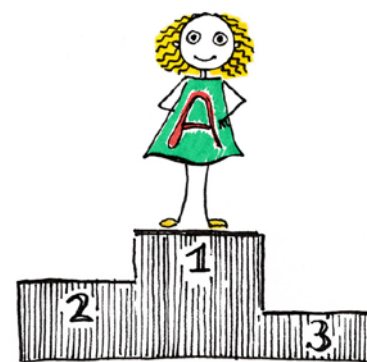
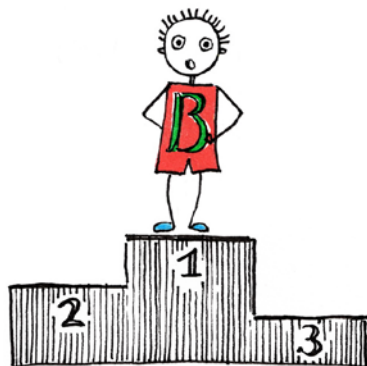
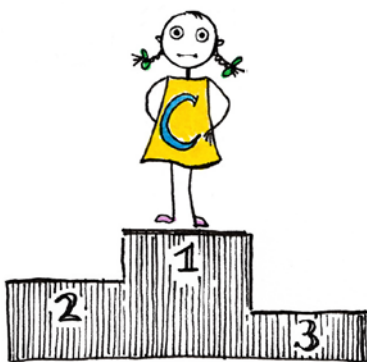
Давайте все их представим:



Видите, это не очень сложно. Ну а если у нас 10 детей? Это уже слишком много комбинаций, так просто их не нарисуешь.

Можно ли представить комбинации про Аню, Васю и Соню как-то иначе?

Выиграть может любой ребёнок.



Если Аня выиграла первое место, второе может получить или Вася, или Соня.

А тот, кто остался,  
получает третье.



Сколько возможно вариантов:

3

2

1

Всего

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Другими словами: каждый из детей может прийти первым, любой из двух оставшихся может оказаться вторым, а третьим будет тот, кто не стал первым и вторым. Количество комбинаций  $3 \times 2 \times 1 = 6$ .

# Что такое факториал

Выражение  $1 \times 2 \times 3$  это произведение всех натуральных чисел меньше тройки включительно. Это называется факториалом числа 3 и пишется “3!”

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Факториалы так часто используют в различных областях математики, что все научные калькуляторы имеют специальную кнопку “!”

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Факториал может очень быстро стать очень большим. Попробуй найти факториал 10.  
А как насчёт факториала числа 20?

А если, например, 10 детей борются за 10 призовых мест?



Решение будет таким же, как и в предыдущем случае: любой из 10 может оказаться первым, любой из оставшихся девяти может стать вторым, и т. д.

Конечное число будет  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  или  $10!$

Это количество перестановок множества из 10 элементов. Мы можем  $10!$  способами линейно упорядочить 10 чего-нибудь (детей) на 10 местах.

Сколько будет  $10!$  ?

$10! = 3628800$ .

Почему число  $10!$

оканчивается на два нуля?

Сколько нулей на конце  $20!$  ?

А  $30!$  ?

А что, если 10 детей соревнуются  
за первые три места?



Опять, каждый из десяти может занять первое место, каждый из оставшихся девяти может занять второе, и любой из оставшихся восьми может занять третье место. Ответ  $10 \times 9 \times 8$  называется количеством *размещений* из 10 по 3.

Можете посчитать,  
сколько это?

Можно ли это записать с  
помощью факториалов?

Конечно:

$$10 \times 9 \times 8 = 10! / 7! = 10! / (10-3)!$$



В последней задаче три самых быстрых бегуна будут представлять свою школу в районном соревновании. Сколько разных вариантов в этом случае?



Эта задача очень похожа на предыдущую с одним отличием: Порядок первых трех призеров не имеет значения.

Решением было  $10 \times 9 \times 8$ , но каждая тройка призеров в прошлой задаче считалась несколько раз.

Мы уже знаем, что три призёра могут разместиться на пьедестале шестью различными способами. Поэтому, мы посчитали каждое решение 6 или  $3!$  раз.

Решение:

$$10 \times 9 \times 8 / 3! = 10! / (7! \times 3!) = 10! / ((10-3)! \times 3!)$$

Это число *сочетаний* из 10-ти по 3.